Lycée Emtiez tozeur Prof : A.HADHRI	**Devoir de contrôle n°1**	A.S :2017/2018 4ème sc exp

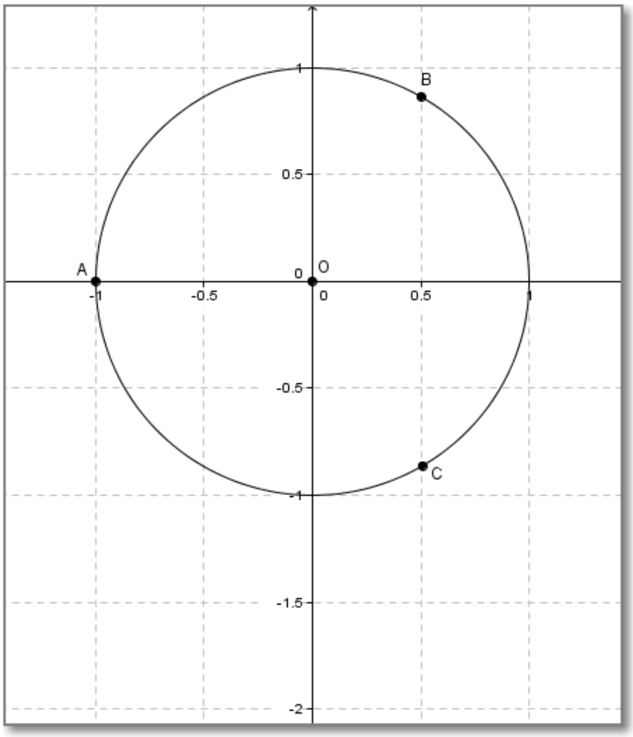
Exercice 1 : (3points)

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)(z^2-z+1)=0$

1.b. Vérifier que les solutions trouvées en a) sont les affixes respectives des points A, B et C appartenant au cercle de rayon 1, **voir ci-contre**

2. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD Soit un parallélogramme.

3. Vérifier, par calcul, que les diagonales de ce parallélogramme se coupent en leur milieu



Exercice 2 : (5 points) :

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $f(2) = 1$
- $g(-1) = -2$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = g(2-x)$

1.a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2,3[$

1.b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]-1,0[$

1.c. Montrer que $\alpha + \beta = 2$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \geq 1 \\ g(x) & si\ x < 1 \end{cases}$

Montrer que h est continue en 1

Exercice 3 : (5 points) :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1-\cos\pi x}{x^2} & si\ x > 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}+\frac{\pi^2}{2}}{1-x} & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$

1. a. Etudier la continuité de la fonction f en 0

1. b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

3. a. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$

3. b. En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4. Montrer que l'équation $f(x) = x + \frac{1}{x}$ admet au moins une solution dans l'intervalle$]1,2[$

5. Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $h(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} hof(x)$

Exercice 4 : (7 points) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soit I le point d'affixe 1, ζ le cercle de centre O et de rayon 1 et ζ' le cercle de centre I et de rayon 1.

Soit z un nombre complexe non nul, M, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z, $z_1 = 1 + iz$ et $z_2 = 1 - iz$

1. Vérifier que I est le milieu du segment $M_1 M_2$

2. Dans cette question, on prendra $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

a. Déterminer la forme trigonométrique de z

b. Mettre $z_1\ et\ z_2$ sous forme cartésienne

c. Montrer que $\overrightarrow{MM_1}\ et\ \vec{u}$ sont colinéaires

d. Montrer que M_1 appartient à ζ'

e. Construire les points M, M_1 et M_2 dans le repère$(o,\vec{u},\vec{v})$.

3. On suppose que $z \neq -i$

a. Montrer que : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-z\bar{z}+i(z+\bar{z})}{|z_2|^2}$

b. En déduire que : O, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si (z)= 0 et que : $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ si et seulement si $z\bar{z} = 1$

4.a. Montrer que : $|z| = 1$ si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$

b. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M_1 et M_2, lorsque M décrit ζ